ВАРИАНТ 9. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

   а) Найдите угол ABC.

   б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

   Ответ: (a) $90°$; (b) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

   Решение. (a) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD, поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90°$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN – их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, и $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN. А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90° - \frac{1}{2}\angle PMA = 90° - \frac{1}{2}\angle TND = 90° - \gamma$. Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна $90°$, и его третий угол $\angle ABC$ также равен $90°$.

   (b) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 5$, $AD = 2MP = 1$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180° - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = 4 + 1 - 4\cos\psi$, $BC^2 = 25 + 4 - 20\cos(180° - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 36$, откуда следует, что $5 - 4\cos\psi + 29 + 20\cos\psi = 36$, $\cos\psi = \frac{1}{8}$. Далее находим: $\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DA \cdot DB\sin\psi + \frac{1}{2}DC \cdot DB \sin(180° - \psi) = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\psi = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

2. **[6 баллов]** Решите уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$.

   Ответ: 5, $\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$.

   Решение. Обозначим $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+4) - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + (6-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{24+2x-x^2} = 10 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 4 = 10 - t^2$; отсюда $t^2 + t - 6 = 0$, т.е. $t = 2$ или $t = -3$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности.

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 4+6-x+4\sqrt{6-x}, \\ -4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{6-x} = x-3, \\ -4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24-4x = x^2-6x+9, \\ 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-15 = 0, \\ 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ или } x = 5, \\ 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5;$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4+6\sqrt{x+4}+9 = 6-x, \\ -4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x+4} = -7-2x, \\ -4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x+144 = 49+28x+4x^2, \\ -4 \leqslant x \leqslant -3{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-8x-95 = 0, \\ -4 \leqslant x \leqslant -3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pm3\sqrt{11}}{2}, \\ -4 \leqslant x \leqslant -3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2-3\sqrt{11}}{2}.$$

   Итак, уравнение имеет два корня: $x = \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$ и $x = 5$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy уравнением $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A, а уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ – парабола с вершиной в точке B. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\left(4y^2+4(2x-5a)y\right)+5x^2-22ax+26a^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((2y)^2+2\cdot 2y\cdot(2x-5a)+(2x-5a)^2\right)-(2x-5a)^2+5x^2-22ax+26a^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2y+2x-5a)^2+x^2-2ax+a^2=0\Leftrightarrow(2y+2x-5a)^2+(x-a)^2=0.$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\left(x_A;y_A\right)$ удовлетворяют равенствам $2x+2y-5a=0$ и $x-a=0$, т.е. $x_A=a$, $y_A=\frac{3a}{2}$.

Так как второе уравнение задаёт параболу, то $a\neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y=x^2+2ax+\left(a^2+\frac{1}{a}\right)$. Координаты точки B следующие: $x_B=-a$, $y_B=y(-a)=\frac{1}{a}$.

Обозначим $f(x;y)=3x-y-4$. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x-y-4=0$ тогда и только тогда, когда $f\left(x_A;y_A\right)$ и $f\left(x_B;y_B\right)$ есть числа разных знаков. Последнее равносильно неравенству $f\left(x_A;y_A\right)\cdot f\left(x_B;y_B\right)<0$. Имеем

$$\left(\frac{3}{2}a-(3a-4)\right)\left(\frac{1}{a}-(-3a-4)\right)<0\Leftrightarrow-\left(\frac{3a}{2}-4\right)\frac{3a^2+4a+1}{a}<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(3a-8)(3a+1)(a+1)}{a}>0\Leftrightarrow a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right).$$

4. **[5 баллов]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2,\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5.\end{cases}$$

Ответ: $(1;\pm1)$, $(-1;\pm1)$.

Решение. Введём новые переменные $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$. Тогда $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=u^2-2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases}\frac{2}{u}+v=2,\\ u^2+v=5.\end{cases}$$

Из первого уравнения $v=2-\frac{2}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2+\left(2-\frac{2}{u}\right)=5\Leftrightarrow u^2-3-\frac{2}{u}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^3-3u-2=0,\\ u\neq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}(u+1)^2(u-2)=0,\\ u\neq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-1,\\ u=2.\end{array}\right.$$

Так как $u>0$, то подходит только значение $u=2$. Значит, $v=1$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ x^2y^2=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2-y^2,\\ \left(2-y^2\right)y^2=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow x^2=y^2=1.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $(1;\pm1)$, $(-1;\pm1)$.

5. **[5 баллов]** На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;59)$, $(59;59)$ и $(59;0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y=x$ или $y=59-x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

Ответ: 370 330.

Решение. Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 58 точек, причём повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 116 способов, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{116\cdot113}{2} = 6\,554$ способа.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (116 способов). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 58^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (116 штук), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (56 штук с учётом исключённых ранее диагональных) или на одной вертикали (56 штук). Отсюда второй узел можно выбрать $58^2-116-112 = 3\,136$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $116\cdot 3\,136 = 363\,776$.

Подводя итоги, имеем $6\,554 + 363\,776 = 370\,330$ способов.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: б) $\frac{79}{100}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT\text{)},$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD+\angle DBT = \angle ABD+\angle BAC = 180^\circ-\angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos 120^\circ = 3^2 + 7^2 + 3\cdot 7 = 79$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2}\cdot10\cdot10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 79 : 100$.

ВАРИАНТ 10. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

   а) Найдите угол ABC.

   б) Пусть дополнительно известно, что $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABC.

   Ответ: (a) 90°; (b) 5.

   Решение. (a) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD, поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN – их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, и $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN. А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle TND = 90^\circ - \gamma$. Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна 90°, и его третий угол $\angle ABC$ также равен 90°.

   (b) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 3$, $AD = 2MP = 2$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = 4 + 5 - 4\sqrt{5}\cos\psi$, $BC^2 = 9 + 5 - 6\sqrt{5}\cos(180^\circ - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 25$, откуда следует, что $9 - 4\sqrt{5}\cos\psi + 14 + 6\sqrt{5}\cos\psi = 25$, $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее находим: $\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DA\cdot DB\sin\psi + \frac{1}{2}DC\cdot DB\sin(180^\circ - \psi) = \frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\psi = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 5$.

2. **[6 баллов]** Решите уравнение $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$.

   Ответ: 6, $\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$.

   Решение. Обозначим $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+3) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + (7-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{21+4x-x^2} = 10 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 4 = 10 - t^2$; отсюда $t^2 + t - 6 = 0$, т.е. $t = 2$ или $t = -3$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{7-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4+7-x+4\sqrt{7-x}, \\ -3 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{7-x} = x-4, \\ -3 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28-4x = x^2-8x+16, \\ 4 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-12 = 0, \\ 4 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ или } x = 6, \\ 4 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6;$$
$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + 3 = \sqrt{7-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3+6\sqrt{x+3}+9 = 7-x, \\ -3 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x+3} = -5-2x, \\ -3 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x+108 = 25+20x+4x^2, \\ -3 \leqslant x \leqslant -2{,}5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-16x-83 = 0, \\ -3 \leqslant x \leqslant -2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pm 3\sqrt{11}}{2}, \\ -4 \leqslant x \leqslant -2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}.$$

   Итак, уравнение имеет два корня: $x = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$ и $x = 6$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy уравнением $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$ заданы координаты точки A, а уравнением $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$ – парабола с вершиной в точке B. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по одну сторону от прямой $2x - y = 5$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\left(y^2-4(x+a)y\right)+8x^2+12ax+5a^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(y^2-2\cdot y\cdot(2x+2a)+(2x+2a)^2\right)-(2x+2a)^2+8x^2+12ax+5a^2=0 \Leftrightarrow\right.$$
$$\Leftrightarrow (y-2x-2a)^2+4x^2+4ax+a^2=0 \Leftrightarrow (y-2x-2a)^2+(2x+a)^2=0.$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A;y_A)$ удовлетворяют равенствам $y-2x-2a=0$ и $2x+a=0$, т.е. $x_A=-\frac{a}{2}$, $y_A=a$.

Так как второе уравнение задаёт параболу, то $a\neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y=x^2-2ax+\left(a^2+\frac{3}{a}\right)$. Координаты точки B следующие: $x_B=a$, $y_B=y(a)=\frac{3}{a}$.

Обозначим $f(x;y)=2x-y-5$. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой $2x-y-5=0$ тогда и только тогда, когда $f\left(x_A;y_A\right)$ и $f\left(x_B;y_B\right)$ – числа одного знака. Последнее равносильно неравенству $f\left(x_A;y_A\right)\cdot f\left(x_B;y_B\right)>0$. Имеем

$$\left(2\left(-\frac{a}{2}\right)-a-5\right)\left(2a-\frac{3}{a}-5\right)>0 \Leftrightarrow -(2a+5)\,\frac{2a^2-5a-3}{a}<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2a+5)(a-3)(2a+1)}{a}<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)\,.$$

4. **[5 баллов]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10,\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81.\end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$.

Решение. Введём новые переменные $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$. Тогда $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=u^2-2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases}\frac{6}{u}+v=10,\\ u^2+5v=81.\end{cases}$$

Из первого уравнения $v=10-\frac{6}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2+5\left(10-\frac{6}{u}\right)=81 \Leftrightarrow u^2-31-\frac{30}{u}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^3-31u-30=0,\\ u\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+1)(u+5)(u-6)=0,\\ u\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=-1,\\ u=-5,\\ u=6.\end{array}\right.$$

Так как $u>0$, то подходит только значение $u=6$. Значит, $v=9$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases}x^2+y^2=6,\\ x^2y^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=6-y^2,\\ \left(6-y^2\right)y^2=9\end{cases} \Leftrightarrow x^2=y^2=3.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $(\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$.

5. **[5 баллов]** На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;69)$, $(69;69)$ и $(69;0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y=x$ или $y=69-x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

Ответ: 601 460.

Решение. Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 68 точек, причём повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 136 способов, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{136\cdot 133}{2} = 9\,044$ способов.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (136 способов). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 68^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (136 штук), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (66 штук с учётом исключённых ранее диагональных) или на одной вертикали (66 штук). Отсюда второй узел можно выбрать $68^2-136-132 = 4\,356$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $136\cdot 4\,356 = 592\,416$.

Подводя итоги, имеем $9\,044 + 592\,416 = 601\,460$ способа.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: б) $\frac{67}{81}$.

Решение. Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT\text{)},$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos 120^\circ = 2^2 + 7^2 + 2\cdot 7 = 67$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 67 : 81$.

ВАРИАНТ 11. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

   а) Найдите угол ABC.

   б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 2$, $BD = \sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

   Ответ: (a) 90°; (b) $\frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}$.

   Решение. (a) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD, поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN – их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, и $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN. А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle TND = 90^\circ - \gamma$. Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна 90°, и его третий угол $\angle ABC$ также равен 90°.

   (b) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 4$, $AD = 2MP = 1$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos\psi$, $BC^2 = 16 + 3 - 8\sqrt{3}\cos(180^\circ - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 25$, откуда следует, что $4 - 2\sqrt{3}\cos\psi + 19 + 8\sqrt{3}\cos\psi = 25$, $\cos\psi = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Далее находим: $\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DA \cdot DB \sin\psi + \frac{1}{2}DC \cdot DB \sin(180^\circ - \psi) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}$.

2. **[6 баллов]** Решите уравнение $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$.

   Ответ: 2, $\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$.

   Решение. Обозначим $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+2) - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + (3-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{6+x-x^2} = 5 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 3 = 5 - t^2$; отсюда $t^2 + t - 2 = 0$, т.е. $t = 1$ или $t = -2$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1+3-x+2\sqrt{3-x}, \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} = x-1, \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2-2x+1, \\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ или } x=2, \\ 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 2 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+4\sqrt{x+2}+4 = 3-x, \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x+2} = -3-2x, \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x+32 = 9+12x+4x^2, \\ -2 \leqslant x \leqslant -1{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x-23=0, \\ -2 \leqslant x \leqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1\pm2\sqrt{6}}{2}, \\ -2 \leqslant x \leqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1-2\sqrt{6}}{2}.$$

   Итак, уравнение имеет два корня: $x = \frac{1-2\sqrt{6}}{2}$ и $x = 2$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy уравнением $5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A, а уравнением $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$ – парабола с вершиной в точке B. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y - 3x = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{7};+\infty\right)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\begin{gathered}\left(4y^2+4(2x+a)y\right)+8x^2+12ax+5a^2=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left((2y)^2+2\cdot 2y\cdot(2x+a)+(2x+a)^2\right)-(2x+a)^2+8x^2+12ax+5a^2=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(2y+2x+a)^2+4x^2+8ax+4a^2=0\Leftrightarrow(2y+2x+a)^2+4(x+a)^2=0.\end{gathered}$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\left(x_A;y_A\right)$ удовлетворяют равенствам $2x+2y+a=0$ и $x+a=0$, т.е. $x_A=-a$, $y_A=\frac{a}{2}$.

Так как второе уравнение задаёт параболу, то $a\neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y=x^2-2ax+\left(a^2+\frac{4}{a}\right)$. Координаты точки B следующие: $x_B=a$, $y_B=y(a)=\frac{4}{a}$.

Обозначим $f(x;y)=3x-y+4$. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x-y-4=0$ тогда и только тогда, когда $f\left(x_A;y_A\right)$ и $f\left(x_B;y_B\right)$ есть числа разных знаков. Последнее равносильно неравенству $f\left(x_A;y_A\right)\cdot f\left(x_B;y_B\right)<0$. Имеем

$$\begin{gathered}\left(3(-a)-\frac{a}{2}+4\right)\left(3a-\frac{4}{a}+4\right)<0\Leftrightarrow-\left(\frac{7a}{2}-4\right)\frac{3a^2+4a-4}{a}>0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\frac{(7a-8)(3a-2)(a+2)}{a}>0\Leftrightarrow a\in(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{7};+\infty\right).\end{gathered}$$

4. **[5 баллов]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5,\\ x^4+y^4+3x^2y^2=20.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right)$.

Решение. Введём новые переменные $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$. Тогда $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=u^2-2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases}\frac{4}{u}+v=5,\\ u^2+v=20.\end{cases}$$

Из первого уравнения $v=5-\frac{4}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$\begin{gathered}u^2+\left(5-\frac{4}{u}\right)=20\Leftrightarrow u^2-15-\frac{4}{u}=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\begin{cases}u^3-15u-4=0,\\ u\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-4)\left(u^2+4u+1\right)=0,\\ u\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=4,\\ u=-2\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{gathered}$$

Так как $u>0$, то подходит только значение $u=4$. Значит, $v=4$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x^2y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4-y^2,\\ \left(4-y^2\right)y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow x^2=y^2=2.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $\left(\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right)$.

5. **[5 баллов]** На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;65)$, $(65;65)$ и $(65;0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y=x$ или $y=65-x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

Ответ: 500 032.

Решение. Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 64 точки, причём повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 128 способов, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{128\cdot125}{2} = 8\,000$ способов.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (128 способов). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 64^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (128 штук), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (62 штуки с учётом исключённых ранее диагональных) или на одной вертикали (62 штуки). Отсюда второй узел можно выбрать $64^2-128-124 = 3\,844$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $128\cdot 3\,844 = 492\,032$.

Подводя итоги, имеем $8\,000 + 492\,032 = 500\,032$ способа.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: б) $\frac{39}{49}$.

Решение. Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos 120^\circ = 2^2 + 5^2 + 2\cdot 5 = 39$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 39 : 49$.

ВАРИАНТ 12. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: (a) 90°; (b) $\frac{\sqrt{35}}{3}$.

Решение. (a) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD, поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN – их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, и $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN. А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle TND = 90^\circ - \gamma$. Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна 90°, и его третий угол $\angle ABC$ также равен 90°.

(b) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 2$, $AD = 2MP = 1$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = \frac{16}{9} + 1 - \frac{8}{3}\cos\psi$, $BC^2 = \frac{16}{9} + 4 - \frac{16}{3}\cos(180^\circ - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 9$, откуда следует, что $\frac{25}{9} - \frac{8}{3}\cos\psi + \frac{52}{9} + \frac{16}{3}\cos\psi = 9$, $\cos\psi = \frac{1}{6}$. Далее находим: $\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DA \cdot DB \sin\psi + \frac{1}{2} DC \cdot DB \sin(180^\circ - \psi) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

2. **[6 баллов]** Решите уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4 + 3x - x^2}$.

Ответ: 3, $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + (4-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{4+3x-x^2} = 5 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 3 = 5 - t^2$; отсюда $t^2 + t - 2 = 0$, т.е. $t = 1$ или $t = -2$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 + 4 - x + 2\sqrt{4-x}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x} = x - 2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = x^2 - 4x + 4, \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ или } x = 3, \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4 = 4 - x, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x+1} = -1 - 2x, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 16 = 1 + 4x + 4x^2, \\ -1 \leqslant x \leqslant -0{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x - 15 = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2}, \\ -1 \leqslant x \leqslant -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{2}.$$

Итак, уравнение имеет два корня: $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ и $x = 3$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy уравнением $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ заданы координаты точки A, а уравнением $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ – парабола с вершиной в точке B. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по одну сторону от прямой $x + y = 3$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\left(x^2+2(y-a)x\right)+5y^2-6ay+2a^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(x^2+2\cdot x\cdot(y-a)+(y-a)^2\right)-(y-a)^2+5y^2-6ay+2a^2=0\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y-a)^2+4y^2-4ay+a^2=0 \Leftrightarrow (x+y-a)^2+(2y-a)^2=0.$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A;y_A)$ удовлетворяют равенствам $x+y-a=0$ и $2y-a=0$, т.е. $x_A=\frac{a}{2}$, $y_A=\frac{a}{2}$.

Так как второе уравнение задаёт параболу, то $a\neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y=x^2+4ax+\left(4a^2+\frac{2}{a}\right)$. Координаты точки B следующие: $x_B=-2a$, $y_B=y(a)=\frac{2}{a}$.

Обозначим $f(x;y)=x+y-3$. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой $x+y-3=0$ тогда и только тогда, когда $f\,(x_A;y_A)$ и $f\,(x_B;y_B)$ – числа одного знака. Последнее равносильно неравенству $f\,(x_A;y_A)\cdot f\,(x_B;y_B)>0$. Имеем

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-3\right)\left(-2a+\frac{2}{a}-3\right)>0 \Leftrightarrow -(a-3)\,\frac{2a^2+3a-2}{a}<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-3)(a+2)(2a-1)}{a}<0 \Leftrightarrow a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right).$$

4. **[5 баллов]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4},\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Введём новые переменные $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$. Тогда $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=u^2-2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases}\frac{1}{u}+v=\frac{5}{4},\\ 2u^2+v=\frac{9}{4}.\end{cases}$$

Из первого уравнения $v=\frac{5}{4}-\frac{1}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$2u^2+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{u}\right)=\frac{9}{4}\Leftrightarrow 2u^2-1-\frac{1}{u}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2u^3-u-1=0,\\ u\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u-1)\left(2u^2+2u+1\right)=0,\\ u\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow u=1.$$

Далее находим, что $v=\frac{1}{4}$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2y^2=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1-y^2,\\ \left(1-y^2\right)y^2=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x^2=y^2=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. **[5 баллов]** На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;63)$, $(63;63)$ и $(63;0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y=x$ или $y=63-x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

Ответ: 453 902.

Решение. Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 62 точки, причём повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 124 способа, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{124 \cdot 121}{2} = 7\,502$ способов.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (124 способа). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 62^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (124 штуки), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (60 штук с учётом исключённых ранее диагональных) или на одной вертикали (60 штук). Отсюда второй узел можно выбрать $62^2 - 124 - 120 = 3\,600$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $124 \cdot 3\,600 = 446\,400$.

Подводя итоги, имеем $7\,502 + 446\,400 = 453\,902$ способа.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: б) $\frac{7}{9}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 2^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 = 28$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 7 : 9$.